$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$$

$$\lim_{0^-} f = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = 0$$

On a : $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f = f(0)$

D'où f est continue en 0

2°/ $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{1}{2} = f'_d(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}$$

f est dérivable à gauche en 0

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

3°/

a) La tangente à Cf au point d'abscisse 0 et pour équation

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = \frac{1}{2}x$ d'où D : $y = \frac{1}{2}x$ est la tangente à Cf au point 0

b) pour $x > 0$

$$d(x) = f(x) - y = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} - \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{x^2+1}-\left(2+x^2\right)}{2x}$$

$$= \frac{4\left(x^2+1\right)-\left(2+x^2\right)^2}{2x\left(2\sqrt{x^2+1}+2+x^2\right)}$$

$$d(x) = \frac{-x^3}{2\left(2\sqrt{x^2+1}+2+x^2\right)} < 0$$

Cf est en dessous de D sur $]0, +\infty[$